

# COPPA HILBERT 2009

## GARA DI MATEMATICA A SQUADRE

Parma, 20 marzo 2009

In collaborazione con  
Dipartimento di Matematica Università di Parma  
Liceo Scientifico "G.Marconi" – Parma

con il patrocinio di  
Comune di Parma  
Provincia di Parma



### Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale  $x$  è il più grande intero minore o uguale a  $x$ .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2360 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \sqrt{11} = 3.3166$$
$$\pi = 3.1416.$$

### Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

## Gara a Squadre – Testi dei problemi

### 1. La luce sulla cima

Il robot paranoico Marvin è sul bordo del cornicione della torre A della *Megadodo Publications*, la casa editrice della *Guida Galattica per AutoStoppisti* ( $G^2AS$ ) a 78 metri di altezza, ha appena terminato la discussione esistenziale con il Frogstar Robot Tank e guarda verso la vetta dell'unica collina di Ursa Minor B. In effetti, guarda proprio la luce in cima dell'antenna sulla vetta della collina: per farlo, alza la testa di 30 gradi. Sapendo che la collina è alta 856 m, l'antenna è alta 6 m e gli occhi di Marvin sono a 2 m dal cornicione, qual è la distanza in metri tra gli occhi di Marvin e la cima dell'antenna?

### 2. Il quadro comandi

Per attivare il quadro comandi della navetta spaziale Heart of Gold, composto da 8 file di 20 pulsanti ciascuna, Zaphod Beeblebrox, l'ex-presidente della Galassia, deve schiacciare 4 pulsanti consecutivi, in un ordine qualunque, ma non sa quali sono, né se sono disposti in orizzontale, in verticale o in diagonale. Quanti tentativi al massimo deve fare per attivare il quadro comandi?

### 3. Alla stazione ipergalattica

In una stazione ipergalattica vicino ad Arcturus, i viaggiatori formano un'unica coda per accedere agli sportelli della biglietteria ed è sempre quello in testa alla coda che si rivolge ad uno degli sportelli disponibili. Nove viaggiatori sono in coda, con tre sportelli in funzione; impiegano tempi diversi, una volta davanti allo sportello, per acquistare i propri biglietti: 4, 6, 9, 11, 15, 36, 38, 40 e 45 minuti. Il tempo impiegato per terminare le operazioni di acquisto è stato il minimo possibile con le condizioni descritte. Qual è stato il tempo impiegato?

### 4. Il tempo di Deep Thought

Per tenere conto del tempo di elaborazione, richiesto da Deep Thought, per produrre la Risposta alla *Domanda Definitiva* sulla Vita, l'Universo e il Tutto, il Sindacato Unico di Filosofi e Altri Pensatori (SUFAP) ha predisposto una clessidra ad acqua formata da due coni, collegati nei vertici. L'acqua riempie il cono inferiore. La clessidra viene girata e l'acqua inizia a scendere; dopo 2009 anni, l'acqua è esattamente a metà altezza del cono inferiore. L'acqua continua a cadere regolarmente. Dopo quanti anni da quando la clessidra del SUFAP è stata girata, l'acqua sarà tutta nel cono inferiore?

### 5. Il gioco di Trillian e Arthur

Aspettando il ritorno di Zaphod, Trillian e Arthur fanno questo gioco. Trillian sceglie cinque numeri diversi tra 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, fa il prodotto dei cinque e comunica il risultato ad Arthur che deve dire se la somma dei cinque numeri è pari o dispari. Qual è il numero più grande che Trillian può dire in modo che Arthur non sia in grado di determinare con certezza la risposta? (Ad esempio, se Trillian dicesse 1680, dalla scomposizione in fattori primi  $1680 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7$ , Arthur capirebbe addirittura che i numeri scelti devono essere 2, 4, 6, 5 e 7; saprebbe dunque rispondere con certezza che la somma è pari.)

## 6. I tre orologi

Secondo la G<sup>2</sup>AS, nella sede del Controllo Galattico Geo-temporale, su enormi pareti, ci sono orologi che indicano l'ora esatta di molti pianeti. In un angolo, ci sono orologi analogici a lancette, che indicano l'ora degli unici tre pianeti nell'universo dove il giorno è diviso in 12 ore da 60 minuti: Fallia, Ciceronicus e Bethselamin. Quando Trillian guarda gli orologi l'orologio di Fallia segna le 7, quello di Bethselamin segna le 11 e quello di Ciceronicus segna le 2. Ma, mentre passa un'ora sull'orologio di Fallia, quello di Ciceronicus si muove di un'ora e 20 minuti e, mentre l'orologio di Bethselamin conta 12 ore, quello di Fallia ne conta 36. Che ora segnerà l'orologio di Fallia la prima volta che quelli di Bethselamin e di Ciceronicus segneranno la stessa ora? Si dia la risposta utilizzando le prime due cifre per l'ora, le ultime due cifre per i minuti.

## 7. Un problema di estetica, I

Discutendo di estetica con il Blagulon Kappa Computer, il robot paranoico Marvin prende un foglio di carta rettangolare di dimensioni 16 cm e 25 cm, lo piega lungo una diagonale, poi incolla le parti sovrapposte. Qual è il valore in cm<sup>2</sup> dell'area del poligono ottenuto?

## 8. Le magliette degli umanoidi

Ford Prefect corre a prendere magliette per i 4 umanoidi che viaggiano sulla Heart of Gold: Trillian ne voleva una azzurra. In un cassetto ci sono 7 magliette rosse e 8 magliette azzurre, ma Ford ne prende quattro senza guardare. Qual è la probabilità che almeno una sia azzurra? Si dia la risposta scrivendo le prime quattro cifre del risultato diverse da 0,1 e 9, nell'ordine in cui compaiono. (Ad esempio, se il risultato fosse  $\frac{5}{7} = 0.714285714\dots$ , si dovrebbe scrivere 7428.)

## 9. Il soprammobile di Slartibartfast

Nello studio di Slartibartfast, c'è un soprammobile che consiste di quattro sfere di marmo di diametro 1.2 dm, bloccate in una scatola trasparente, di base quadrata di lato 2.4 dm senza coperchio; al centro, sopra alle quattro sfere di marmo, è appoggiata una sfera di acciaio di diametro 1.37 dm. Qual è l'altezza in mm del soprammobile?

## 10. Il poligono della SCS

Nella hall della Sirius Cybernetics Corporation, un pannello decorativo consiste di un poligono regolare di 33 lati iscritto in una circonferenza. Come esercizio, il robot Marvin controlla tutti i trapezi (compresi i parallelogrammi) che si possono generare con 4 dei 33 vertici del poligono. Quanti trapezi ha controllato?

## 11. Un problema di estetica, II

Il Blagulon Kappa Computer, che non approva il senso estetico del robot Marvin, prende un foglio di carta rettangolare delle stesse dimensioni di quello usato nel problema 7., per piegarlo in modo completamente diverso da quello di Marvin. Infatti, lo piega sovrapponendo due vertici opposti, poi incolla le parti sovrapposte. Qual è il valore in cm<sup>2</sup> dell'area del poligono ottenuto?

## 12. I litigi su Damogran

Su un'isola di Damogran, ci sono contadini molto litigiosi. Ognuno di questi è in lite con tutti gli altri per motivi territoriali; per questo motivo si sono rivolti ad un giudice di pace che ha aperto una pratica per ogni contesa. Sapendo che il giudice ha nel suo ufficio 438516 pratiche, quanti contadini ci sono sull'isola?

### 13. La beneficenza dei neo-matematici

Cento neo-matematici dei laboratori della Sirius Cybernetics Corporation hanno escogitato un sistema per vincere al casinò di Santraginus 5. Hooloovoo, il capo, mette i 3 dollari altariani con cui il gruppo di neo-matematici inizia a giocare; ogni sera che gioca, il gruppo triplica il patrimonio. Per non dar adito a sospetti, giocano una volta ogni due settimane, sempre di giovedì. Hanno iniziato giovedì 20 marzo 2008; hanno smesso ieri. Restituiti a Hooloovoo i 3 dollari che aveva investito all'inizio, i cento neo-matematici si sono divisi il patrimonio totale vinto in parti uguali, arrotondando ad un numero intero di dollari, e hanno donato il resto in beneficenza. Quanti dollari altariani hanno donato in beneficenza?

### 14. La sveglia su Eadrax

Sul pianeta Eadrax un giorno dura 100 ore, un'ora dura 100 minuti, un minuto dura 100 secondi. Nella piazza principale della capitale, in cima a una torre altissima, c'è un grande orologio digitale ben visibile, diviso in 3 riquadri 

hh	mm	ss
----	----	----

. Avendo la possibilità di vedere sempre il grande orologio digitale, i lavoratori sono diventati molto metodici: si svegliano, mangiano e vanno a dormire tutti sempre alla stessa ora.

- Si svegliano, tutti allo stesso momento tra le 7 e le 8; in quel preciso momento, l'orario sul grande orologio mostra tre numeri distinti.
- Iniziano a mangiare il pranzo, tutti nello stesso momento, quando il grande orologio digitale indica un orario che, come numero di 6 cifre, è esattamente il triplo di quello di sveglia; i tre numeri nei riquadri dell'orologio sono gli stessi dell'orario di sveglia, ma chiaramente in una differente disposizione.
- Vanno a dormire, tutti nello stesso momento, quando il grande orologio digitale indica un orario che, come numero di 6 cifre, è esattamente il triplo dell'orario dell'inizio del pranzo; ancora i tre numeri nei riquadri dell'orologio sono gli stessi dell'ora di sveglia (e di pranzo), ma in un'altra disposizione.

Qual è l'orario di sveglia? Si dia la risposta scrivendo i minuti e i secondi.

### 15. I templi di Magrathea, I

Su Magrathea si sa che nel remoto passato furono costruiti molti templi, rettangolari in onore del sole Soulianis, e circolari in onore dell'altro sole Rahm.

Scavando in una zona archeologica, vengono dissotterrati resti di 9 colonne. Gli archeologi determinano con precisione le posizioni dei loro centri: 7 stanno sul perimetro di un grande rettangolo (100 m per 11.44 m), occupandone i 4 vertici più altri 3 punti; 6 stanno sul perimetro di un rettangolo più piccolo (14.3 m per 6 m), occupandone i 4 vertici più altri 2 punti—necessariamente 4 di questi punti appartengono ad entrambi i perimetri. I due rettangoli non hanno lati paralleli. Inoltre, si osserva che un lato lungo del rettangolo piccolo ha entrambi gli estremi sul perimetro del rettangolo grande, uno sovrapposto ad un vertice, e l'altro no. L'altro lato lungo ha invece entrambi i vertici all'esterno del rettangolo grande.

Gli archeologi cercano di capire se hanno trovato tracce di un tempio circolare dedicato al sole Rahm. Per cercarne traccia con maggiori probabilità di successo, decidono di scavare tutti quei solchi circolari che passino per almeno 4 delle 9 colonne che hanno già trovato.

Una volta identificate le circonferenze che gli archeologi intendono scavare, si conti per ciascuna delle 9 colonne a quante di queste circonferenze appartiene; si dia come risposta la somma del prodotto di quei 9 numeri con la somma di quei 9 numeri.

## 16. Il costo variabile di un cocktail

Per pagare un Pan Galactic Gargle Blaster al Bistrò Illegale, si prendono 50 dollari altariani, si dividono le 50 monete in due mucchi, si contano le monete di ognuno dei due mucchi e si scrive il prodotto delle due conte. Poi si prende uno dei mucchi con più di una moneta e lo si divide in due mucchi, si contano le monete di ogni mucchio e si scrive il prodotto delle due conte. Si continua finché tutti i mucchi sono di una sola moneta. Si sommano tutti i prodotti. Si paga la somma finale che si ottiene (non 50 dollari altariani). Qual è la somma massima che si può dover pagare?

## 17. Le monorotaie di Ursa Minor Beta

Sul pianeta Ursa Minor Beta, c'è un lunghissimo rettilineo ferroviario con due monorotaie dove, grazie ad un sofisticato sistema computerizzato, i treni possono viaggiare in entrambe le direzioni su ciascuna monorotaia. Su tutto il rettilineo, non viaggiano mai due treni sulla stessa monorotaia. La distanza tra le due monorotaie è di 1.9 m. I treni viaggiano a velocità costanti e predeterminate: le più comunemente usate per marcia rapida e normale risultano essere, rispettivamente, di 295.4 km/h e 147.7 km/h, quando trasformate nel sistema metrico decimale. Ogni treno ha in punta una piccola antenna (di dimensioni trascurabili) che, quando necessario, emette un segnale radio. Quando le antenne di due treni sono a distanza inferiore di o uguale a 749.25 m emettono un segnale radio continuo per segnalare la posizione reciproca. Gli ingegneri ferroviari si sono resi conto che il segnale viene trasmesso per un tempo più lungo quando due treni marciano nello stesso senso rispetto a quando due treni marciano in sensi opposti. Qual è il rapporto tra la durata di trasmissione del segnale tra due treni che viaggiano nello stesso senso, uno in marcia rapida, l'altro in marcia normale, e la durata di trasmissione del segnale tra due treni che viaggiano in sensi opposti, uno in marcia rapida, l'altro in marcia normale? Nella risposta si scriva il rapporto moltiplicato per 100.

## 18. L'Esercito della Contraddizione Apparente

L'Esercito della Contraddizione Apparente (ECA) di Altair arruola soltanto persone che siano disposte a dire sempre la verità o sempre il falso. Hanno armi potentissime, quasi paradossali, che possono annichilire territori sterminati in un solo, assurdo colpo. Un reggimento di 2009 soldati è composto da sinceri e bugiardi. Un colonnello (non si diventa colonnelli dell'ECA se non si dice sempre la verità) ordina ai 2009 soldati del reggimento di mettersi in rassegna, a rettangolo su 41 file. A quel punto, ogni soldato esclama: «Tra quelli intorno a me, c'è esattamente un bugiardo.» Il colonnello verifica che i soldati siano perfettamente allineati, che intorno ad ogni soldato ci siano 8 soldati, esclusi quelli sui lati del rettangolo di rassegna. Come controllo definitivo, chiede ai soldati della prima fila di dichiarare quanti bugiardi hanno a fianco nella fila. Ognuno dei soldati della prima fila dichiara: «Di fianco a me, nella prima fila, c'è esattamente un bugiardo.» Tra i 2009 soldati del reggimento dell'ECA, quanti sono sinceri?

## 19. I templi di Magrathea, II

Tra tutti i solchi circolari che si prevede di scavare nel problema 15., il primo che verrà scavato è quello della circonferenza più piccola.

Quanti cm è lungo il diametro di questa circonferenza?

## 20. La noia di Marvin

Analizzando sé stesso, il robot paranoico Marvin trova, nei recessi dei suoi circuiti digitali, un'operazione  $\boxtimes$  tra numeri naturali con le seguenti proprietà:

$$a \boxtimes (a + b) = a \boxtimes b \quad a \boxtimes b = b \boxtimes a \quad a \boxtimes 0 = a$$

per numeri naturali  $a, b$  qualunque. Per passare il tempo, Marvin calcola il valore di  $n \boxtimes 2009$  per tutti gli  $n$  da 1 a 2008. Qual è il valore massimo calcolato da Marvin?

### 21. Il gioco della doppia testa-e-croce

Nelle bettole di Traal, si gioca il gioco della doppia testa-e-croce, con una moneta, tra due squadre di due giocatori. Un giocatore della prima squadra lancia la moneta: se esce croce, è eliminato dal gioco; se esce testa, non succede nulla. Ora, un giocatore dell'altra squadra lancia una moneta: se esce croce, è eliminato; se esce testa, elimina uno dei giocatori della prima squadra. Il gioco passa di nuovo alla prima squadra e si continua come dall'inizio. Perde la squadra che finisce prima i giocatori. Che probabilità ha la prima squadra di vincere? Si dia la risposta scrivendo le prime quattro cifre del risultato diverse da 0,1 e 9, nell'ordine in cui compaiono. (Ad esempio, se il risultato fosse  $\frac{5}{7} = 0.714285714\dots$ , si dovrebbe scrivere 7428.)

### 22. Lo psichiatra paranormale

Per dimostrare ai clienti le sue capacità ultra-psichiatriche, il dottor Gag Halfgrunt fa eseguire un facile esperimento al paziente: gli dice di estrarre un certo numero di palline da una scatola che contiene 2009 palline, numerate da 1 a 2009. Lui, parlando al paziente, farà in modo che, tra le palline estratte, ce ne siano almeno due che riportano numeri una il triplo dell'altra. Il fatto è che Gag fa sempre estrarre il minimo numero di palline che gli assicura di ottenere il risultato. Qual è il minimo numero  $n$  tale che, presi comunque  $n$  palline numerate da 1 a 2009, ce ne siano due tra queste con numeri che siano uno il triplo dell'altro?

### 23. La tavoletta di cioccolata

Dopo aver bevuto tre Pan Galactic Gargle Blaster, Ford e Zaphod hanno fatto generare al Nutri-matic Food Synthesizer un'enorme tavoletta rettangolare di cioccolata a riquadri: 9002 colonne, ciascuna composta da 2009 riquadri di cioccolata. Decidono di fare un gioco: spalmano di maionese il riquadro in un vertice; poi, a turno, ognuno di loro spezzerà la tavoletta (o quel che ne resta) in due pezzi rettangolari, lungo una delle scanalature tra i riquadri, mangiando una delle due parti. Perde chi mangia il riquadro con la maionese. Ford gioca per primo. Quale rettangolo deve mangiare alla prima mossa per essere certo di vincere? Si indichi nella risposta il numero di riquadri diverso da 2009 e da 9002 di uno dei lati del pezzo di cioccolata che deve mangiare.

### 24. Il campionato di MCD

I pianeti che partecipano al torneo del campionato galattico di MCD devono iscrivere due squadre al torneo; ogni squadra gioca una e una sola volta contro tutte le squadre degli altri pianeti iscritti, ma non gioca contro l'altra squadra del proprio pianeta. MCD è un gioco molto particolare: quest'anno, prevede che una partita finisca quando il somma dei punti segnati dalle due squadre è 2009, ma con un'importante eccezione. Quando la somma arriva a 2009, se i punteggi delle due squadre hanno massimo comun divisore diverso da 1, il punteggio della squadra in vantaggio viene azzerato e la partita continua. Sapendo che tutte le partite si sono concluse con punteggi diversi (2008-1 e 1-2008 sono considerati punteggi uguali), quante potevano essere al massimo le squadre?

*Per saperne di più, si può consultare  
la Guida Galattica per AutoStoppisti,  
come trascritta da Douglas Adams,  
ai cui eredi appartengono i diritti sui personaggi e luoghi menzionati  
e alla cui mente vanno  $\infty$  ringraziamenti per l'eccellente trascrizione.*